УДК 517.982.3

ПРОСТРАНСТВА СО СВОЙСТВОМ ПЕЛЧИНЬСКОГО

В.О. Яндаров

Грозненский государственный нефтяной институт им. акад. М.Д. Миллионщикова, г. Грозный

Рецензент Н.П. Пучков

Ключевые слова и фразы: банахово пространство; гиперподпространство; замкнутое пространство; сопряженное пространство; тотализатор; свойство Пелчиньского.

Аннотация. В работе рассматриваются бесконечномерные банаховы пространства X_1, X и их подпространства при условии слабо компактной и плотной вложенности X_1 в X. Существенную роль при исследовании пространств $X_1 \in \mathrm{E}\left(X\right)$ играют сопряженные пространства X_1^* и X_1^{**} соответственно к X_1 и X_1^*, а также пространство Z^*, являющееся замыканием $\overline{X}^*$ пространства X^* в пространстве $X_1^* : Z^* = \overline{X}^*$. В зависимости от того что Z^* является сопряженным или нет к некоторому замкнутому подпространству $Y \subset X_1$, исследуется рефлексивность пространств или их свойство – не содержать или содержать подпространства, изоморфные l_1.

Банаховы пространства X_1, не содержащие подпространств, изоморфных l_1, называются пространствами Розенталя (обозначение $X_1 \not\succ l_1$). В работе используются обозначения и определения из статей [1–7]. Усиленная изоморфность сопряженному пространству банахова пространства $X_1 \in \mathrm{E}\left(X\right)$ определяется равенством $W_X\left(X_1\right) = X_1$ или равенством $X_1 = W_\sigma\left(X_1\right)$, где $\sigma = \sigma\left(X_1, Y^*\right)$ и Y^* – тотальное на X подпространство в X_1^* [1–4].

Так, например, любое гиперподпространство $\ker x^*$ в l_1, где $x^* \notin c_0$, изоморфно сопряженному в широком смысле изоморфизма, но необяза-

---

Яндаров В.О. – кафедра высшей математики Грозненского государственного нефтяного института им. акад. М.Д. Миллионщикова, г. Грозный.

тельно в указанном выше смысле и тем самым не усиленно изоморфно сопряженному пространству.

Изоморфность сопряженному подпространства $Y \subset X_1^*$ понимается как изометрическая изоморфность, т. е. Y в этом случае считается сопряженным к некоторому замкнутому подпространству в X_1.

Теорема 1. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. Для того чтобы $X_1^* = Z^*$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого собственного замкнутого подпространства Y в X_1 существовал ненулевой элемент $z^* \in Z^*$ такой, что $z^*(Y) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Если $X_1^* = Z^*$, то очевидно существование ненулевого элемента $x^* \in X_1^* = Z^*$ для любого собственного замкнутого подпространства Y в X_1 такого, что $x^*(Y) = 0$. Это следует из теоремы Хана-Банаха.

Достаточность. Предположим, что $X_1^* \neq Z^*$. Тогда существует дефлектор $x^* \in X_1^*$, который по определению обладает свойством: гиперподпространство $H(x^*)$ имеет такое же относительное пополнение, что и X_1, т.е. $H(x^*) \in (W)$. Любой элемент $z^* \in Z^*$, обращающийся в нуль на $H(x^*)$, является нулевым элементом в Z^*. В самом деле, Z^{**} по лемме в [5] изометрически изоморфно $W_X(X_1)$ и поэтому, если $z^*(H(x^*)) = 0$, то $z^*(W_X(X_1)) = 0$. Отсюда следует, что z^* – нулевой элемент. Таким образом, предположение о существовании дефлектора $x^* \in X_1^*$ приводит к противоречию с условием утверждения. Следовательно, дефлекторов в X_1^* не существует и поэтому $X_1^* = Z^*$.

Предложение 1. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. Для того чтобы Z^* было сопряженным к некоторому замкнутому подпространству $Y \in (W)$, необходимо и достаточно, чтобы каждое гиперподпространство в Y не являлось тотальным на Z^* подпространством в Z^{**}.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть Z^* изоморфно сопряженному. Тогда по известному утверждению [1, с. 274] Z^{**} имеет минимальное на Z^* подпространство Y. Отсюда следует, что Z^* является сопряженным к $Y \in (W)$. Гиперподпространство $H(z^*)$, где z^* – произвольный ненулевой элемент из Z^*, не является тотальным на Z^* подпространством в Z^{**}.

Если допустить, что это не так, то это противоречит минимальности [5] (неприводимости [1]) подпространства Y.

Достаточность. Пусть $H\left(z^*\right)$ – некоторое гиперподпространство в $Y \in \left(W\right)$, определяемое некоторым элементом $z^* \in Y^*$, не является тотальным на Z^* подпространством в Z^{**}. Отсюда следует, что Y – минимальное подпространство в Z^{**}. В самом деле, если бы это было не так, то существовал бы дефлектор $x^* \in Y^*$ и $H\left(x^*\right) \subset Y$. Тогда по определению дефлектора $H\left(x^*\right) \in \left(W\right)$ и, следовательно, $H\left(x^*\right)$ – тотальное на Z^* подпространство в Z^{**}, а это противоречит условию. Отсюда следует [1], что Z^* изоморфно сопряженному, точнее, является сопряженным к $Y \in \left(W\right)$.

Теорема 2. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}\left(X\right)$. Для того чтобы X_1^{**} не имело тотализаторов, необходимо и достаточно, чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных l_1, и удовлетворяло условию $X_1 \in R\left(X\right)$: каждая слабая последовательность Коши в X_1 и X, слабо сходящаяся к нулю в одном из X_1 или X, слабо сходится к нулю и в другом.

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 1 из [5] следует, что $X_1^* = Z^*$. Отсюда следует, что X_1 – пространство Розенталя, т.е. X_1 не содержит подпространств, изоморфных l_1.

Пусть $\{x_n\}$ – слабая последовательность Коши в X_1, слабо сходящаяся к нулю в X: $\lim\limits_{n\to\infty} x^*\left(x_n\right) = 0 \ \forall x^* \in X^*$. Отсюда, так как X^* плотно в X_1^* и $X_1^* = Z^*$, то $\forall x^* \in X_1^* \ \lim\limits_{n\to\infty} x^*\left(x_n\right) = 0$.

Достаточность. Докажем, что $X_1^* = Z^*$, так как по теореме 1 из [5] это равенство равносильно отсутствию тотализаторов в X_1^{**}. Предположим, что $X_1^* \neq Z^*$. Тогда, так как X_1 – пространство Розенталя, всякий тотализатор в X_1^{**} будет секвенциальным. Поэтому существует элемент $x_0 \in X_1^{**}$ такой, что $x_0\left(x^*\right) = 1$ и $x_0\left(z^*\right) = 0 \ \forall z^* \in Z^*$. Пусть $\{x_n\}$ – слабая последовательность Коши в X_1 такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z^*\left(x_n\right) = x_0\left(z^*\right) = 0$. Так как по условию последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к нулю в X, сходится слабо к нулю и в X_1, то из указанного выше равенства следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x^*\left(x_n\right) = 0 \ \forall x^* \in X_1^*$. Отсюда следует, что x_0 – нулевой элемент в X_1, а это противоречит определению тотализатора в X_1^{**}. Следовательно, предположение о неравенстве $X_1^* \neq Z^*$ приводит к противоречию.

Теорема 3. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. Для того чтобы $X_1^* = Z^*$, необходимо и достаточно, чтобы каждое гиперподпространство $H\left(x^{**}\right)$ в X_1^*, где x^{**} – ненулевой элемент из X_1^{**}, не содержало подпространств в X_1^*, тотальных на $W_X(X_1)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $X_1^* = Z^*$. Тогда по теореме 1 в [5] не существует тотализаторов $x^{**} \in Z^{**}$, т.е. не существует гиперподпространств $H\left(x^{**}\right) \supset Z^*$, так как $x^{**} \in Z^{**}$. В самом деле, по лемме из [5] ненулевому элементу x^{**} соответствует единственный элемент $x_0 \in W_X(X_1)$ такой, что $x^{**}\left(x^*\right) = x^*(x_0)\ \forall x^* \in X_1^* = Z^*$, $H\left(x^{**}\right) = H(x_0)$. Следовательно, существует элемент $x_0 \in W_X(X_1)$ такой, что $H(x_0)$ не является тотальным на $W_X(X_1)$ подпространством в X_1^*. В силу произвольности выбора элемента x^{**} и, следовательно, элемента $x_0 \in W_X(X_1)$, из сказанного выше следует, что если $X_1^* = Z^*$, то каждое гиперподпространство в X_1^* не содержит подпространств в X_1^*, тотальных на $W_X(X_1)$.

Достаточность. Пусть каждое гиперподпространство в X_1^* не является тотальным на $W_X(X_1)$ подпространством в X_1^*. Отсюда следует, что X_1^{**} не содержит тотализаторов. В самом деле, если допустить противное, то существует элемент $z^{**} \in X_1^{**}$ такой, что гиперподпространство $H\left(x^{**}\right)$ содержит Z^*, т.е. существует тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$. Таким образом, существование тотализатора в X_1^{**} противоречит условию доказываемого утверждения. На основании теоремы 1 из [5] утверждаем, что в X_1^* нет дефлекторов. Следовательно, $X_1^* = Z^*$.

Предложение 2. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. Для того чтобы в X_1^{**} не было тотализаторов, необходимо и достаточно, чтобы каждому элементу $x^{**} \in X_1^{**}$ соответствовал единственный элемент $x \in W_X(X_1)$ такой, что выполняется равенство

$$x^{**}\left(x^*\right) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X_1^*. \tag{1}$$

Доказательство. *Необходимость.* Если X_1^{**} не содержит тотализаторов, то по теореме 2 или 3 заключаем, что $X_1^* = Z^*$. Тогда равенство (1) вытекает из соответствующего равенства в лемме из [5].

Достаточность. Если выполняется (1), то из леммы в [5] следует, что $X_1^* = Z^*$. Отсюда заключаем, что X_1^{**} не имеет тотализаторов.

Предложение 3. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. Для того чтобы существовал тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$, необходимо и достаточно, чтобы X^* не было плотно в X_1^*.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x^{**} – тотализатор в X_1^{**}. Тогда, очевидно, существует дефлектор $x^* \in X_1^*$ такой, что $x^{**}\left(x^*\right) = 1$ и $x^{**}\left(z^*\right) = 0\ \forall z^* \in Z^*$. Последнее равенство выполняется и для любых $z^* \in X^*$, так как $X^* \subset Z^*$. Отсюда следует, что X^* не плотно в X_1^*.

Достаточность. Если X^* не плотно в X_1^* то $X_1^* \neq Z^*$. Следовательно, существуют дефлектор $x^* \notin Z^*$ и тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$ такие, что $x^{**}\left(x^*\right) = 1$ и $x^{**}\left(z^*\right) = 0\ \forall z^* \in Z^*$. Существование тотализатора отвечает требуемому утверждению.

Теорема 4. Для того чтобы произвольное банахово пространство $X_1 \in \mathrm{E}(X)$ было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы каждое гиперподпространство $H\left(x^*\right)$ было усиленно изоморфно сопряженному пространству $\left(x^* \in X_1^*\right)$.

Доказательство. *Необходимость.* Так как X_1 рефлексивно, то можно считать, что $X_1 \in \mathrm{E}(X_1)$. Следовательно, $W_{X_1}\left(H\left(x^*\right)\right) = H\left(x^*\right)$, так как каждое замкнутое подпространство в X_1 рефлексивно. Отсюда по теореме 2 из [5] следует, что $H\left(x^*\right)$ усиленно изоморфно сопряженному.

Достаточность. Если каждое гиперподпространство $H\left(x^*\right)$ в X_1 усиленно изоморфно сопряженному, то таким же будет и пространство X_1. Следовательно, для любого $x^* \in X_1^*$ выполняется равенство $W_\sigma\left(H\left(x^*\right)\right) = H\left(x^*\right)$, где $\sigma = \sigma\left(X_1, Y^*\right)$ и Y^* – минимальное подпространство в X_1^*.

Предположим, что минимальное подпространство Y^* в X_1^* не совпадает с X_1^*. Тогда существует элемент $x^* \in X_1^*$ и $x^* \notin Y^*$ такой, что $W_\sigma\left(H\left(x^*\right)\right) = X_1$. Отсюда по теореме 2 из [5] следует, что $H\left(x^*\right)$ усиленно не изоморфно сопряженному, а это противоречит условию утверждения.

Следствие 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) X_1 рефлексивно; 2) каждое замкнутое подпространство в X_1 усиленно изоморфно сопряженному; 3) минимальное подпространство Y^* в X_1^* совпадает с X_1^*: $Y^* = X_1^*$; 4) для каждого замкнутого подпространства $Y \subset X_1$ выполняется равенство $W_\sigma(Y) = Y$, где $\sigma = \sigma\left(X_1^{**}, Y_0^*\right)$, а Y_0^* – некоторое тотальное подпространство в X_1^*.

Теорема 5. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. Для того чтобы сепарабельное банахово пространство X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) существует наименьшее замкнутое подпространство Y в X_1 такое, что $W_X(Y) = W_X(X_1)$; 2) Y усиленно изоморфно сопряженному.

Доказательство. *Необходимость.* По теореме 4 X_1 усиленно изоморфно сопряженному. Следовательно, выполняется утверждение 2) теоремы. Так как X_1 рефлексивно, то минимальное подпространство Y^* в X_1^* совпадает с X_1^*. Следовательно, X_1– наименьшее замкнутое подпространство в $X_1 \in (W)$. В самом деле, в силу рефлексивности X_1 выполняется равенство $X_1^* = Z^*$. Отсюда следует, что X_1^* не имеет дефлекторов или X_1^{**}– тотализаторов. Поэтому не существует гиперподпространства $H\left(x^*\right) \in (W)$ или гиперподпространства $H\left(x^{**}\right) \supset Z^*$, где x^* и x^{**} – ненулевые элементы соответственно в X_1^* и X_1^{**}. Следовательно, X_1 – наименьшее замкнутое подпространство со свойством (W).

Таким образом, выполняется и условие 1).

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2), т.е. существует Y – наименьшее замкнутое подпространство в X_1 со свойством (W) и Y усиленно изоморфно сопряженному. Из 2) следует, что Y^* имеет минимальное подпространство Y_0^* такое, что $W_\sigma(Y) = Y$, где $\sigma = \sigma\left(Y, Y_0^*\right)$. Можно считать, что $Y_0^* = Z^*$. Из условия 1) следует, что существует наименьшее замкнутое подпространство Y в X_1 со свойством (W). Отсюда следует, что $Z^* = Y^*$, а по лемме из [5] Y^{**} изометрически изоморфно $W_\sigma(X_1) = W_X(X_1)$. Тогда из 2) следует $Y^{**} \subset W_X(Y) = Y$. Следовательно, в силу сепарабельности X_1, Y^* не содержит подпространств, изоморфных l_1, и, кроме того, Y – усиленно изоморфно сопряженному. Отсюда следует, что Y рефлексивно. Так как $W_X(Y) = W_X(X_1)$, то X_1 рефлексивно.

Замечание. Сепарабельность банахова пространства X_1 не обязательна.

Теорема 6. Для того чтобы в любом нерефлексивном банаховом пространстве X_1, усиленно изоморфном сопряженному, существовало гиперподпространство $H\left(x^*\right)$ (x^* – ненулевой элемент из X_1^*), неизоморфное X_1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$W_\sigma\left(H\left(x^*\right)\right)=W_\sigma\left(X_1\right)=X_1, \qquad (2)$$

где $\sigma=\sigma\left(X_1,Y^*\right)$ и Y^* – минимальное подпространство в X_1^*.

Доказательство. *Необходимость.* Если не существует $x^* \in X_1^*$, для которого выполняется равенство (2), то из включений $H\left(x^*\right) \subset W_\sigma\left(H\left(x^*\right)\right) \subset W_\sigma\left(X_1\right)=X_1$ следует, что либо $W_\sigma\left(H\left(x^*\right)\right)=X_1$, либо $W_\sigma\left(H\left(x^*\right)\right)=H\left(x^*\right)$. Первое равенство не возможно, так как по предположению не выполняется (2). Следовательно, выполняется второе равенство. Тогда $X_1^*=Y^*$. В самом деле, если существует элемент $x^* \notin Y^*$ и $x^* \in X_1^*$, то существует элемент $y^* \in X_1^*$ такой, что $W_\sigma\left(H\left(y^*\right)\right)=X_1$, а это противоречит предположению. Из равенства $X_1^*=Y^*$ следует, что пространство X_1 рефлексивно, а это противоречит условию теоремы.

Достаточность. Если выполняется (2), то $x^* \notin Y^*$. Тогда по теореме 4 из [5] $H\left(x^*\right)$ не может быть усиленно изоморфно сопряженному.

Определение. Будем говорить, что банахово пространство $X_1 \in \mathrm{E}\left(X\right)$ обладает свойством Пелчиньского (P) [3, 5, 6,] если для любой слабой последовательности Коши $\left\{x_n\right\} \subset X_1$ существует элемент $x_0 \in W_X\left(X_1\right)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x^*\left(x_n-x_0\right)=0\ \forall x^* \in X_1^*$.

Таким свойством обладают, например, банаховы пространства $X_1 \in \mathrm{E}\left(X\right)$, для которых $X_1^*=Z^*$.

Предложение 4. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}\left(X\right)$ и $X_1^*=Z^*$. Тогда каждое бесконечномерное собственное замкнутое подпространство Y в X_1 обладает свойством: каждый элемент $x \in X_1 \setminus Y$ не является элементом из $W_{X_0}\left(Y\right) \setminus Y$, где X_0 – замкнутое подпространство в X такое, что Y плотно в X_0.

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно. Тогда существует элемент $x \in X_1 \setminus Y$ такой, что $x \in W_{X_0}\left(Y\right) \setminus Y$. Следовательно, существует ограниченная в X_1 последовательность $\left\{x_n\right\} \subset Y$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x^*\left(x_n\right)=x^*\left(x\right)\ \ \forall x^* \in X_1^*=Z^*. \qquad (*)$$

Так как существует элемент $x^* \in X_1^* = Z^*$ такой, что $x^*(Y)=0$, $x^*(x)=1$, то равенство (*) не выполняется. Таким образом, предположение о том, что $x \in W_{X_0}(Y) \setminus Y$, не верно.

Предложение 5. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$ и $X_1^* = Z^*$. Кроме того, Y – замкнутое подпространство в X_1, сопряженное к которому – Y^*. Для того чтобы гиперподпространство $H(y)$ в Y^*, где $y \in Y^{**}$, было тотально на Y, необходимо и достаточно, чтобы $y \in W_{X_0}(Y) \setminus Y$.

Доказательство. *Необходимость.* Так как $X_1 \in \mathrm{E}(X)$, то и $Y \in \mathrm{E}(X_0)$, где X_0 – замкнутое подпространство в X такое, что Y плотно в X_0. Из того что $X_1^* = Z^*$ следует, что $X_1 \not\succ l_1$. Следовательно, таких подпространств не содержит и Y. Очевидно, Y^{**} не содержит секвенциальных тотализаторов. В самом деле, если бы существовал секвенциальный тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$, то $x^{**} \notin W_X(X_1)$ и, тем более, $x^{**} \notin W_{X_0}(Y)$, а это невозможно. Следовательно, так как $Y \not\succ l_1$ и не содержит секвенциальных тотализаторов, то $Y^* = Z_0^*$, где Z_0^* – замыкание X_0^*, сопряженного к X_0, в пространстве Y^*, сопряженном к Y. Пусть $y = y^{**} \in Y^{**} \setminus Y$. Тогда гиперподпространство $H(y)$ тотально на Y. Так как $H(y) \neq Y^*$, то существует $y_1^{**} \in W_X(Y) \setminus Y$ такой, что $y_1^{**}(H(y)) = 0$. Тогда $y_1^{**} = y \in W_{X_0}(Y) \setminus Y$.

Достаточность очевидна.

Дефлектор $X^* \in X_1^*$ называется почти чистым (чистым), если существует наименьшее замкнутое подпространство $Y \subset X_1$ и $Y \in (W)$, на котором x^* обращается в элемент $z^* \in Z^*$ (в нуль).

Теорема 7. Пусть $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. Для того чтобы $X_1^* = Z^*$ и X_1 было нерефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы каждый дефлектор в $W_X(X_1)^*$, сопряженном к $W_X(X_1)$, был чистым или почти чистым, и для любого гиперподпространства H_W в $W_X(X_1)$, для которого пересечение $H_W \cap X_1 \in (W)$, выполнялось равенство

$$W_X(X_1) = H_W \oplus Rx_0, \tag{3}$$

где $x_0 \in W_X(X_1) \setminus X_1$, $R = (-\infty, \infty)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть X_1 нерефлексивно и $X_1^* = Z^*$, т.е. X_1^* не содержит дефлекторов и $X_1 \in (R): X_1$ не содержит подпространств, изоморфных l_1. Тогда $X_1 \neq W_X(X_1)$, т.е. X_1 является собственным замкнутым подпространством в $W_X(X_1)$. Тогда существует гиперподпространство H_W в $W_X(X_1)$ со свойством (W). Если допустить, что это не так, то каждое гиперподпространство H_W не обладает свойством (W). Тогда по следствию 2 в [7] существует ненулевой элемент $z^* \in Z^*$ такой, что $z^*(H_W) = 0$. Так как $H_W = \ker y^*$, где $y^* \in W_X(X_1)^*$, то из равенства $\ker z^* = \ker y^*$ следует, что $y^* \in Z^* = X_1^*$. Таким образом, по допущению получается равенство $X_1^* = W_X(X_1)^*$, которое, исходя из равенства $X_1^* = Z^*$, равносильно рефлексивности X_1, а это противоречит условию доказываемого утверждения. Следовательно, допущение о том, что не существует гиперподпространства H_W со свойством (W), не верно. Пространство X_1 является минимальным или наименьшим замкнутым подпространством в пространстве $W_X(X_1)$ со свойством (W). Это означает, что каждый дефлектор $W_X(X_1)^*$ является чистым или почти чистым. Так как $X_1 \in (W)$ и является наименьшим (минимальным) подпространством в $W_X(X_1)$, то пересечение $X_1 \cap H_W$ со свойством (W) совпадает с X_1. В самом деле, если допустить, что это не так, то $Y = X_1 \cap H_W \neq X_1$ и $Y \in (W)$ (по условию). Отсюда следует, что Y – собственное замкнутое подпространство в X_1 со свойством (W). Это противоречит определению наименьшего замкнутого подпространства X_1. Следовательно, допущение о том, что $X_1 \neq H_W \cap X_1$, не верно. Итак, $X_1 \subset H_W$ и справедливо равенство (3).

Достаточность. Пусть для каждого гиперподпространства $H_W \subset W_X(X_1)$, такого, что $H_W \cap X_1 \in (W)$, выполняется равенство (3). По условию доказываемого утверждения каждый дефлектор в $W_X(X_1)^*$, сопряженном к $W_X(X_1)$, является чистым или почти чистым. Отсюда следует, в частности, что X_1 не рефлексивно, так как в противном случае в $W_X(X_1)^*$, сопряженном к $W_X(X_1)$, не было бы никаких дефлекторов и $Z^* = W_X(X_1)^*$, что означало бы рефлексивность X_1. Пусть H_W – такое гиперподпространство в $W_X(X_1)$, что $H_W \cap X_1 \in (W)$. Очевидно, $H_W \in (W)$. Следовательно, существует ненулевой элемент $x^* \in W_X(X_1)^*$ такой, что $\ker x^* = H_w$. Так как $H_W \in (W)$, то x^* – дефлектор в пространстве $W_X(X_1)^*$, сопряженном к $W_X(X_1)$. По условию каждый дефлектор в $W_X(X_1)^*$ является чистым или почти чистым. Тогда по определению этих дефлекторов в пространстве $W_X(X_1)$ существует наименьшее замкнутое подпространство $Y \in (W)$ такое, что каждый дефлектор в $W_X(X_1)^*$ обращается на Y в элемент $z^* \in Z^*$. Не умаляя общности, можно считать, что дефлектор $x^* \in W_X(X_1)^*$ является чистым дефлектором, обращающимся в нуль на подпространстве $Y \subset W_X(X_1)$. Предположим, что x^* не обращается в нуль на X_1, т.е. существует элемент $x_0 \in X_1 \setminus Y$ такой, что $x^*(x_0) = 1$. Обозначим через x_0^* сужение на X_1 элемента $x^* \in W_X(X_1)^*$. По условию пространство $X_1 \cap H_W$ обладает свойством (W), где $H_W = \ker x^*$. Отсюда, так как $\ker x_0^* = X_1 \cap H_W$, следует, что x_0^* – дефлектор в X_1^*. Кроме того, элемент $x_0 \in X_1 \setminus Y$, на котором $x^*(x_0) = 1$, не принадлежит $H_W = \ker x^* \subset W_X(X_1)$. Поэтому имеет место представление

$$W_X(X_1) = H_W \oplus Rx_0, \tag{4}$$

где $x_0 \in X_1 \setminus Y$. Равенство (4) противоречит равенству (3), в котором $x_0 \in W_X(X_1) \setminus X_1$. Следовательно, предположение о том, что x_0^* – дефлектор в X_1^*, не верно. Поэтому $X_1^* = Z^*$. Теорема 7 доказана.

Список литературы

1. Бурбаки, Н. Топологические векторные пространства / Н. Бурбаки. – М. : Изд-во иностр. лит., 1959. – 410 с.
2. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.
3. Singer, I. Some characterizations of reflexivity / I. Singer // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 52, № 1. – Pp. 166–168.
4. Садовничий, В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. – М. : Высшая школа, 1999. – 368 с.
5. Яндаров, В.О. Исследование слабо компактно и плотно вложенных банаховых пространств / В.О. Яндаров // Деп. в ВИНИТИ 27.03.87, № 2427–В87. – 62 с.
6. Яндаров, В.О. К изоморфной теории банаховых пространств и ее применению / В.О. Яндаров // Доклады АНСССР. – 1988. – Т. 300, № 3. – С. 554–558.
7. Яндаров, В.О. О новом положительном решении проблемы С. Банаха о сепарабельности пространства, сопряженного к сепарабельному пространству Розенталя / В.О. Яндаров // Труды ГГНИ им. акад. М.Д. Миллионщикова. – Грозный, 2003. Вып. 3. – С. 96–109.

Space with Pelchinsky's Properties

V.O. Yandarov

Grosny State Oil Institute
named after Academician M.D. Millionshchikov, Grozny

Key words and phrases: Banach space; hyper-subspace; closed space; conjugate space; totalizator; Pelchinsky's Properties.

Abstract: The paper deals with infinite-dimensional Banach spaces X_1, X and their subspaces in conditions of weak and strong logical structural level of X_1 in X. The conjugate spaces X_1^* and X_1^{**} related to X_1 and X_1^* as well as space Z^*, which is a closure of $\bar{X}^*$ of X^* space in the space $X_1^* : Z^* = \bar{X}^*$, play significant role in research into spaces $X_1 \in \mathrm{E}(X)$. The reflexivity of spaces and their properties are studied.