ББК П 258.1

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ НОРМОЙ РЕАКЦИИ И ФОРМОЙ ЛИСТОВЫХ ПЛАСТИН ЗЕМЛЯНИКИ

А.А. Аникьев, Н.И. Федоряка, Э.Н. Аникьева

Мичуринский государственный аграрный университет

Рецензент А.Н. Квочкин

Ключевые слова и фразы: коэффициент формы; листовая пластина; сеть жилкования; форма листьев.

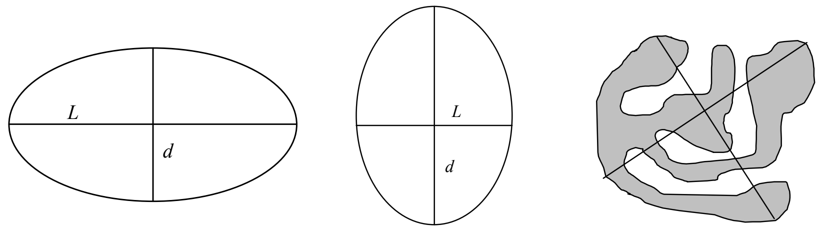
Аннотация: Проведена количественная оценка формы листовых пластин земляники трех сортов по измеренным морфометрическим индексам: отношению длины центральной жилки к ширине пластины, отношению периметра к площади, в целях выявления возможного количественного параметра, характеризующего клоны внутри сорта и разделение сортов по данному признаку.

Форма реальных объектов может быть описана сравнением их проекций с формой графических примитивов – n-угольников, эллипсов. Формы примитивов заданы своими метрическими свойствами – характерными линейными размерами, привязанными к определенной системе отсчета с выделенной ориентацией в пространстве. Минимальное количество линейных размеров обычно совпадает с размерностью пространства. Влияние масштабирования исключается переходом к безразмерным величинам. Например, объект овальной формы можно охарактеризовать отношением длин между наиболее удаленными поперечными и продольными точками фронтальной проекции объекта

$$K_1 = L/d\ , \tag{1}$$

где L, d – длина и ширина проекции, соответственно (рис. 1, *а*, *б*).

Аникьев А.А. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Информатика» МичГАУ; Федоряка Н.И. – кандидат сельскохозяйственных наук, старший преподаватель кафедры «Информатика» МичГАУ; Аникьева Э.Н. – старший преподаватель кафедры «Информатика» МичГАУ.



а) *б*) *в*)

Рис. 1

Первый недостаток этого способа связан с неразличимостью «поперечных» и «продольных» размеров, которые должны быть привязаны к какому-нибудь третьему признаку, задающему ориентацию объекта в плоскости. Второй недостаток состоит в полном пренебрежении «второстепенными» деталями формы, такими как изрезанность краев, наличие самопересечений и т.п. (рис. 1, *в*), которые оказываются главными при переходе к понятию размерности объектов.

Этот простой способ позволяет судить лишь о степени вытянутости объекта по отношению к выбранному направлению. Выбор направления, а также плоскости проекции обусловлены свойствами самого объекта и целями исследования (субъективными факторами). Данный параметр применим к телам овальной формы в качестве первичного параметра оценки общей формы объекта, пренебрегая деталями.

В качестве характеристики формы, отношение длины к ширине не применимо хотя бы потому, что окружность и квадрат с точки зрения этого отношения количественно не различимы.

Второй способ состоит в измерении периметра объекта и одной из характерных длин, например, расстояния между наиболее удаленными точками, и устраняет оба недостатка первого

$$K_P = P/l\,. \tag{2}$$

Третий способ – отношение периметра к корню квадратному из площади, следует признать наиболее точным, но и трудоемким

$$K_S = P/\sqrt{S}\,. \tag{3}$$

Второй и третий случаи при оценке формы близки. Рассмотрим это на примере трех идеальных фигур на плоскости: круг, квадрат, треугольник. Параметр K в (2) и (3) имеет соответственно этим случаям характерные значения.

Способ (2): а) круга – π; б) квадрата – 4; в) треугольника – 3;

Способ (3): а) круга – $2\sqrt{\pi}$; б) квадрата – 4; в) треугольника – $6/\sqrt[4]{3}$.

Рассмотрим особенности этих двух способов более подробно.

Предположим, что форма фигуры произвольно меняется. Возьмем квадрат. Будем изменять стороны квадрата как $(a + x)$ и $(a - x)$. Периметр остается постоянным и не зависит от переменной x, а длина $\ell = a + x$ зависит от x, тогда $P = 2(a + x) + 2\,(a - x) = 4a$.

Коэффициент формы в способе (2)

$$K_P = \frac{P}{\ell} = \frac{4a}{a+x} = \frac{4}{1+x/a}; \qquad \lim_{x\to\infty} K_P = 0 \tag{4}$$

изменяется в пределах $2 \le K_P \le 4$ при $0 < x < a$ и характеризует изменение формы квадрата при его растяжении или сжатии при неизменном периметре. Очевидно, имеют смысл только значения x в интервале (0; a). Соотношение (3) в этом случае для коэффициента формы K_S дает

$$K_S = \frac{4a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 - x^2/a^2}} \tag{5}$$

и имеет предельное значение $\lim_{x\to a} K_S = \infty$.

Из уравнений(4) и (5) очевидно, что коэффициент формы K_S имеет преимущество, так как позволяет в естественном виде получать разумные пределы изменения x от 0 до a, в то время как соотношение (4) формально допускает значения x на всей числовой оси, что не имеет смысла для реальных объектов.

Кроме того, из (5) вытекает наличие экстремума (минимума) функции $K_S(x)$ при $x = 0$, что соответствует коэффициенту $K_S(0) = 4$ для квадрата, а в точке $x = a$ производная имеет особенность, по своему смыслу совпадающую с определением размерности по Хаусдорфу–Безиковичу [1]. В этой точке двумерный объект стягивается в одномерный (K_S переходит через бесконечность).

Если мы оставим неизменной площадь и будем произвольно менять форму, тогда коэффициент формы (2) будет иметь вид

$$K_P = \frac{2\left(a + \frac{A}{a}\right)}{a} = 2\left(1 + \frac{A}{a^2}\right), \tag{6}$$

где a изменяется произвольно; A – постоянная, которая имеет размерность площади. При $0 < a < \infty$ коэффициент $2 < K_P < \infty$.

Коэффициент K_S из (3) в этом случае будет иметь вид

$$K_S = \frac{2(a + A/a)}{\sqrt{A}} \tag{7}$$

и при $0 < a < \infty$; $\infty > K_S > 0$.

В случае постоянной площади A = const определение (6) коэффициента $K_P(a)$ описывает гладкую функцию, не имеющую экстремумов с особенностью в точке $a = 0$ (рис. 2), причем точка $a = \sqrt{A}$ ничем не выделена для объекта формы. В то же время определение $K_S(a)$ (7) и в этом случае является предпочтительным, так как наряду с особенностью при $a = 0$, правильно описывающую смену размерности от двумерной к одномерному имеет экстремум (минимум) в точке $a = A^{1/2}$, что указывает на предельный случай – форму квадрата (рис. 3).

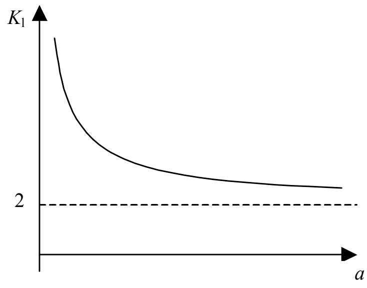


Рис. 2 Зависимость коэффициента формы K_ℓ от линейных размеров объекта
(при $a = 0$ имеется особенность размерности $2 \to 1$)

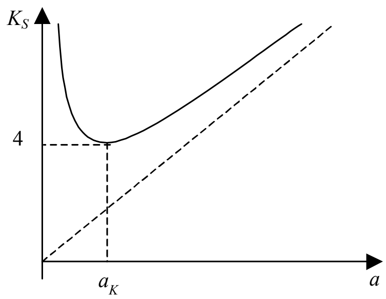


Рис. 3 Вид зависимости $K_S(a)$
(минимум соответствует случаю квадрата $a_K^2 = A$)

Рассмотрим пример окружности при ее сжатии или растяжении. В случае постоянной площади радиус окружности может быть выражен через два параметра $R^2 = ab$, характеризующие деформацию по оси x или y.

В случае деформации имеем

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi; \\ y = b\sin\varphi, \end{cases} \tag{8}$$

отсюда $y = b\left(1 - x^2/a^2\right)^{1/2}$.

Элементарное интегрирование по области, ограниченной функцией $y(x)$ и координатными осями в интервале изменения x от 0 до a, позволяет вычислить площадь деформированной окружности (эллипса)

$$S = \frac{\pi ab}{4} \cdot 4 = \pi ab .$$

Периметр деформированной окружности вдоль одной из осей (y) находим интегрированием вдоль кривой, заданной в параметрическом виде (8)

$$P = \int_0^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi . \tag{9}$$

Интеграл (9) после подстановки (8) приводится к хорошо известному эллиптическому интегралу вида

$$P = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi , \tag{10}$$

где $k^2 = \left(b^2 - a^2\right)/b^2$.

Интеграл (10) – это полный эллиптический интеграл 2-го рода и в стандартных обозначениях периметр тогда можно записать в виде $P = 4bE\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)$. При $k \to 0$ ($b \to a$) интеграл в (10) стремится к $\pi/2$ и периметр будет $P = 2\pi a$. При $k \to 1$ ($a \to 0$) интеграл в (10) стремится к ℓ и периметр $P = 4b$. Эллиптический интеграл является гладкой убывающей функцией действительной переменной k и коэффициент подобия K_P в определении (4) $K_P = 2E(\pi/2, k)$ не имеет особенностей при уменьшении одной из полуосей эллипса до нуля. Естественно, если не учитывать особенности эллиптической функции мнимого аргумента при $a > b$. В то же время коэффициент подобия в определении (5) будет иметь особенность при $a \to 0$ вида

$$K_S(a) = 4\sqrt{\frac{b}{\pi a}}E\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

что указывает на вырождение двумерного объекта в одномерный, в полном соответствии с определением размерности по Хаусдорфу.

Анализ формы кривой полностью аналогичен приведенному рассмотрению для квадрата и показывает, что определение (3) предпочтительнее, так как дает правильный переход к другой размерности и в экстремуме функции $K_S(a)$ получаем форму окружности.

Рассмотренные нами специальные случаи показывают, что форма двумерных объектов может быть оценена количественно двумя последними способами, причем третий способ оказывается наиболее корректным, хотя и трудоемким. По аналогии, форма трехмерных связных объектов может быть оценена количественно по трем проекциям на координатные плоскости. Здесь необходимо заметить, что хотя коэффициенты формы (2) и (3) устанавливают связь между периметром фигуры и ее линейными размерами или площадью, однако, эта связь не является однозначной. Возможны ситуации, когда площадь не изменяется, а периметр неограниченно растет с уменьшением масштаба (фракталы). Более того, для связных фигур увеличение степени изрезанности без самопересечений, как показано на рис. 1, *в*, приводит к уменьшению площади и неограниченному росту периметра, при неизменных линейных размерах занимаемого ею пространства. Численное значение коэффициента формы тем больше, чем сложнее форма фигуры. Наибольшую чувствительность к форме проявляет коэффициент, определяемый через площадь и периметр.

Нами проведены измерения периметра, площади, длины центральной и боковых жилок листьев земляники в целях выявления возможного количественного параметра, характеризующего клоны внутри сорта и разделение сортов по данному признаку. На листьях земляники сортов Зенга–Зенгана, Марышка и Кама, предварительно засушенных без складок и деформаций были измерены периметр, площадь, длина основных боковых и центральной жилок с помощью курвиметра и миллиметровой бумаги обычным способом для проведения калибровки. Основная масса измерений была проведена с помощью программы оконтуривания изображения связных объектов, разработанной нами ранее [2]. Изображение листовой пластинки было получено сканированием с различным разрешением. Использовались разрешения 150, 200, 300, 600, 800, 1200 dpi (точек на дюйм). Увеличение разрешения позволило повысить точность оценки периметра, а также построить зависимость длины контура от единицы масштаба. Если мы имеем вид зависимости $P = f(S)$, то можем определить площадь, зная периметр, или напротив, периметр при известной площади.

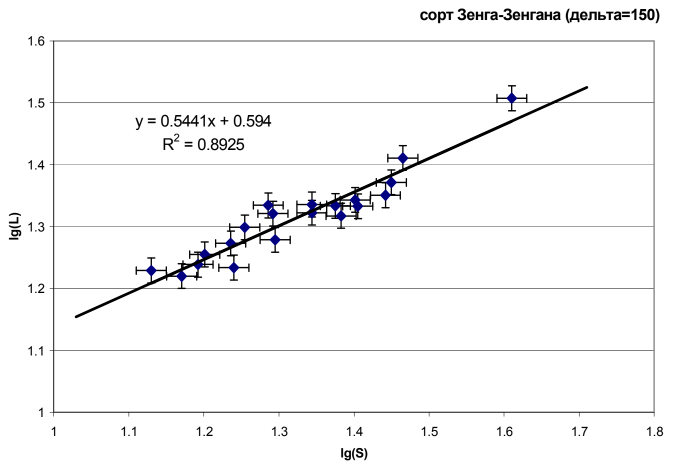
Отношение суммарной длины боковых жилок к длине центральной жилки или отношение суммарной длины основных жилок к занимаемой ими площади (площади листовой пластины) показывает степень разветвленности транспортной системы и, тем самым, функциональную активность листьев. Именно этот параметр должен быть наиболее чувствителен к процессам адаптации растений, и служить индикатором нормы реакции на внешнее воздействие.

На рис. 4 и 5 представлены зависимости периметра от площади 40 листовых пластин земляники трех сортов. Функции, описывающие поведение экспериментальных точек являются нелинейными (логарифмические оси) и на рисунках они показаны для соответствующих сортов.

В общем виде зависимость периметра от площади можно представить функцией

$$P = K_S(a)S^{D/2}, \qquad (11)$$

где a – масштаб измерений; D – некоторая степень, характеризующая отклонение размерности от целого значения. Форму листа характеризует множитель при площади, и чем меньше эталон длины наших измерений,



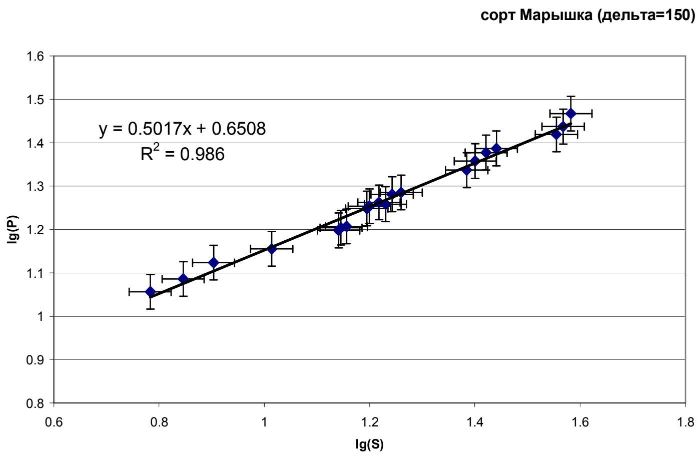


Рис. 4 Зависимость периметра от площади
для двух сортов земляники при одинаковом разрешении
(сплошная линия – вид наилучшего приближения)

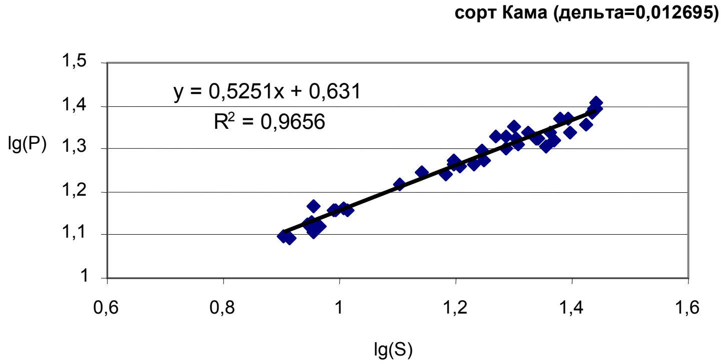


Рис. 5 Зависимость периметра от площади листьев сорта Кама
(точки– эмпирические данные; сплошная линия – функция наилучшего приближения, полученная методом наименьших квадратов)

тем точнее будет измерен периметр, а следовательно, и точнее определено отклонение размерности объекта от целой в том случае, если объект действительно имеет фрактальные свойства. Если таких свойств нет, соотношение (11) позволяет оценить коэффициент формы объектов. Наши измерения показывают, что с увеличением разрешения (уменьшением эталона длины), площадь остается неизменной, а периметр возрастает, что указывает на включение в периметр все более мелких деталей структуры листовой пластинки. Из (1) также видно, что коэффициент формы будет тем больше, чем более сложным будет форма объекта по степени изрезанности границ.

Естественно для большего количества сортов это значение изменится, но для земляники коэффициент формы листа будет находиться в пределах среднего K_S. По данному индексу нами не обнаружено фрактальных свойств, коэффициент размерности D практически не отличается от единицы в пределах ошибки измерений.

Вообще говоря, сеть жилкования представляет собой наиболее оптимальный потенциальный рельеф выбираемый генотипом для целей реализации обмена потоками веществ между клетками ткани листа, остальными органами растения и окружающей средой. Степень эффективности развернутости сети жилкования должна быть скорректирована внешними условиями и от того, насколько сеть обладает высокой плотностью, т.е. количеством жилок, приходящихся на единицу площади, настолько должна быть высока продуктивность растения. На рис. 6 представлен график зависимости суммы длин жилок от площади в двойном логарифмическом масштабе. В случае, если экспериментальные точки будут аппроксимированы линейным законом, наклон линии регрессии будет характеризовать показатель степенного закона, а свободный коэффициент линии регрессии – коэффициент формы листовой пластины. Сплошной линией на рис. 6 показан вид линейной зависимости, аппроксимирующий эмпирические точки методом наименьших квадратов.

В табл. 1 приведены значения показателей размерности, коэффициентов формы для трех изученных сортов.

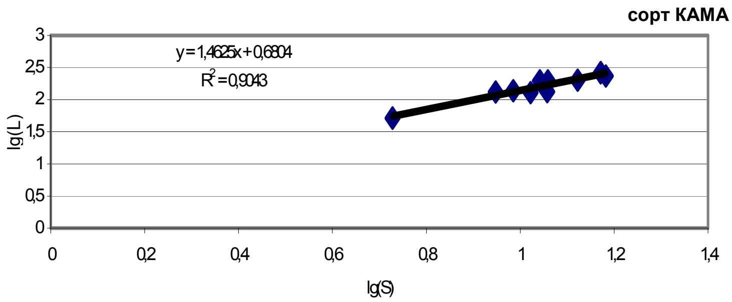


Рис. 6 Эмпирические зависимости суммарной длины жилок от площади листовых пластин земляники сорта Кама (квадраты)

В связи с малым размером выборки, как видно, погрешности определения коэффициентов велики даже для доверительной вероятности 0,95. Тем не менее, тенденции основных зависимостей сохраняются. Нами были построены доверительные коридоры линий регрессии для каждого сорта, указывающие в какой зоне, могут варьировать параметры линий регрессии. В качестве иллюстрации, на рис. 7 показаны результаты для сорта Зенга–Зенгана.

Таблица 1

Показатели размерности, формы сети жилкования листьев

Сорт	Показатель размерности, D	Коэффициент формы, K_P	Коэффициент отношения длин жилок к площади
Зенга–Зенгана	$1,5019 \pm 0,433$	$2,6371 \pm 1,7548$	$1,5088 \pm 0,1672$
Кама	$1,4625 \pm 0,359$	$2,9189 \pm 1,8$	$1,3584 \pm 0,1641$
Марышка	$1,1387 \pm 0,4727$	$7,6558 \pm 2,8418$	$1,1711 \pm 0,0769$

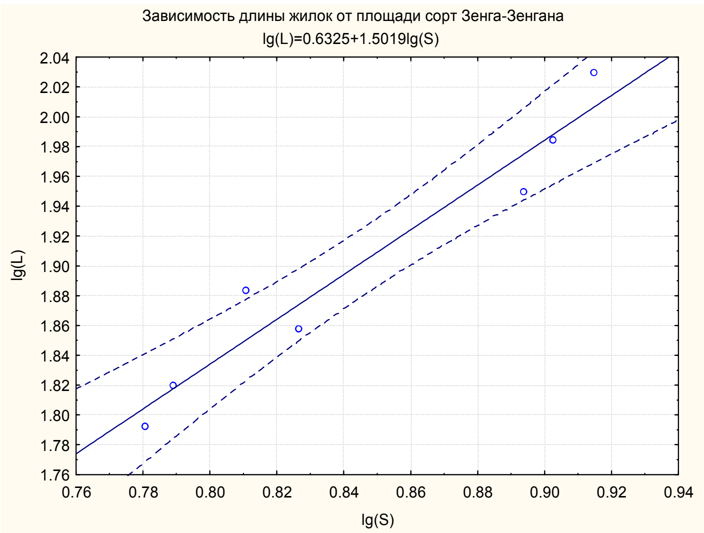


Рис. 7 Линия регрессии с доверительным коридором (пунктир) зависимости суммарной длины жилок от площади в двойном логарифмическом масштабе для листьев сорта Зенга–Зенгана

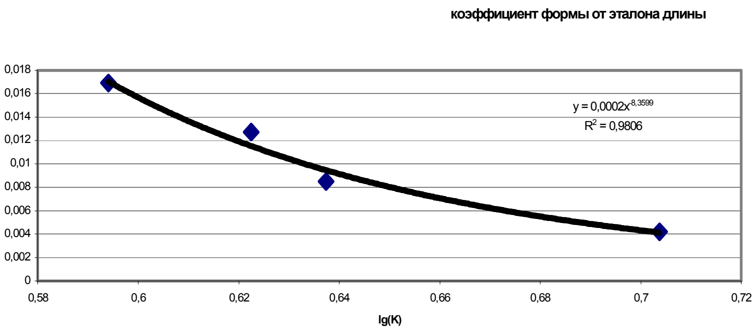


Рис. 8 Зависимость величины коэффициента формы от эталона длины для сорта Зенга–Зенгана
(в пределе $\Delta \to 0$, $\lg(K_S) \to 0{,}7337$ – максимально возможному коэффициенту формы для данного сорта)

Мы построили также зависимости коэффициента формы от эталона длины для тех же трех сортов земляники. В качестве иллюстрации такая зависимость показана на рис. 8 для сорта Зенга–Зенгана. Как видно из рисунка, величина K возрастает с уменьшением эталона длины и в пределе нулевого эталона длины имеем предельное значение коэффициента формы для сорта Зенга–Зенгана $K_S = 10^{0,73} = 5{,}42$.

Список литературы

1 Mandelbrot, B.B. Fractals: Form, Chance and Dimension / B.B. Mandelbrot,. 1977, W.H. Freeman, San Francisco. – 443 p.

2 Дайос, Н.Н. Количественная шкала сортоописания земляники по топологическим параметрам листовых пластин / Н.Н. Дайос, Н. И. Федоряка, Н.И. Козлова // Агропромышленный комплекс: Проблемы и перспективы : сборник научных трудов международно-практической конференции МичГАУ. – Мичуринск, 2001. – Т. 3. – С. 190 – 194.

The Correlation between the Reaction Norm and the Shape of Strawberry Leaf Plates

A.A. Anikyev, N.I. Fedoryaka, E.N. Anikyeva

Michurinsk State Agricultural University

Key words and phrases: shape coefficient; leaf plates; veining; leaf shape.

Abstract: Quantitative evaluation of leaf plates shape of three sorts of strawberries is carried out by measured morphometric indexes: the relation between the length of the central vein and the

plate width, the relation between the perimeter and the square; the aim of the research is to find out quantitative parameter, characterizing clones within the sort and classification of sorts according to this feature.